

# Quaternions

## Application aux rotations dans l'espace

par **Jean-Claude RADIX**

Ingénieur civil des Télécommunications

Ingénieur à la Société Nationale Industrielle Aérospatiale

Professeur à l'École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace (ENSAE)  
et à l'École Nationale Supérieure des Techniques Avancées (ENSTA)

1. Définition et propriétés des quaternions .....	A 140 - 2
2. Représentation d'une rotation par un quaternion.....	— 3
3. Application aux produits de rotations.....	— 5
3.1 Première méthode .....	— 5
3.2 Deuxième méthode .....	— 5
3.3 Représentation de l'attitude d'un véhicule.....	— 5
3.3.1 Notation engin .....	— 5
3.3.2 Notations avion-bateau.....	— 6
Références bibliographiques .....	— 6

L'utilisation des **nombres complexes** (de la forme  $a + ib$ , avec  $a$  et  $b$  réels et  $i^2 = -1$ , permet de résoudre élégamment certains problèmes de géométrie plane, dans lesquels interviennent des déplacements et des similitudes, et en particulier des rotations autour du point zéro, origine des coordonnées. Un nombre complexe  $a + ib$ , ou encore  $pe^{i\theta}$  sous sa notation polaire, devient ainsi un opérateur et réalise, par la multiplication, une rotation d'angle  $\theta$  suivie d'une homothétie de rapport  $p$ .

La généralisation de cette méthode aux problèmes de géométrie dans l'espace (à trois dimensions) a naturellement tenté un certain nombre de mathématiciens. La difficulté provenait du fait qu'ils cherchaient à résoudre cette question en respectant simultanément deux contraintes :

— conservation de la validité des règles habituelles du calcul algébrique (associativité et commutativité de l'addition et de la multiplication, distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, etc.) ;

— aptitude du nouveau concept à l'étude des rotations autour de l'origine.

Ce fut le mathématicien et astronome irlandais Hamilton qui réussit en 1843, après une dizaine d'années de recherches, à dégager les points suivants, aboutissant ainsi à la découverte des quaternions [1] [2] [3] :

— la généralisation des doublets ( $a, b$ ) représentant les nombres complexes ne peut pas être faite au moyen de triplets ( $a, b, c$ ) pour des raisons d'ordre purement algébrique ; par contre, cette généralisation peut être effectuée au moyen de quadruplets ( $a, b, c, d$ ) ;

— l'algèbre recherchée doit présenter un caractère non commutatif traduisant la non-commutativité (en général) des produits de rotations autour d'un point, dans l'espace à trois dimensions.

Hamilton réussit ainsi à définir un ensemble de **nombres** à quatre composantes, présentant une structure de corps non commutatif (cf article Langages des ensembles et structures [AF 33] dans le présent traité), que lui-même et ses élèves

appliquèrent aux problèmes de géométrie. En fait, ce calcul quaternionesque fut quelque peu éclipsé par le calcul vectoriel classique (avec produits scalaires, vectoriels, mixtes, etc.), aussi bien en géométrie qu'en mécanique rationnelle. Cependant, depuis une vingtaine d'années, nous assistons à une réapparition de ces quaternions, notamment dans la résolution de certains problèmes de pilotage et de navigation, par exemple à propos des systèmes inertIELS à composants liés [7].

L'objet de cet article est de rappeler la définition des **quaternions**, de montrer comment ils peuvent être associés à des vecteurs à trois dimensions et être utilisés dans la représentation des rotations.

## 1. Définition et propriétés des quaternions

On appelle *quaternion* une expression de la forme :

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \quad (1)$$

avec  $q_0$  partie réelle,

$q_1 i + q_2 j + q_3 k$  partie imaginaire,

$q_0, q_1, q_2, q_3$  nombres réels,

$i, j, k$  grandeurs vérifiant les relations suivantes :

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} i \cdot j = -j \cdot i = k \\ j \cdot k = -k \cdot j = i \\ k \cdot i = -i \cdot k = j \end{array} \right\} \quad (3)$$

**Remarque :** bien que cela ne soit pas envisagé ici, il est également possible de définir des quaternions à composantes complexes ; dans ce cas, il faut différencier le symbole  $i$  des relations (2) et (3), et le symbole  $i$  utilisé dans la définition des nombres complexes.

Les relations (2) généralisent la relation  $i^2 = -1$  entrant dans la définition des nombres complexes ; les relations (3) sont analogues aux relations (produits vectoriels) :

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = -\vec{j} \wedge \vec{i} = \vec{k}$$

reliant les vecteurs  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  d'un trièdre orthonormé.

Au quaternion  $q$  nous associons une représentation géométrique avec :

- un scalaire  $q_0$  ;
- un vecteur  $\vec{V}$  dont les composantes dans un trièdre ortho-normé fixé sont  $(q_1, q_2, q_3)$ .

**Remarque :** ce trièdre peut éventuellement être défini par des vecteurs  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , mais on prendra soin de ne pas les confondre, le cas échéant, avec les grandeurs  $(i, j, k)$  entrant dans la définition du quaternion.

Inversement, à un vecteur  $\vec{V}$ , de composantes  $(x, y, z)$  dans un trièdre ( $T$ ) bien défini, nous associons un *quaternion purement imaginaire* :

$$\underline{\vec{V}}_T \text{ (ou, plus simplement, } \underline{\vec{V}}) = xi + yj + zk \quad (4)$$

Structurellement, on considère donc l'ensemble des quaternions, définis par la relation (1), comme un **espace vectoriel réel de dimensions 4**, dont une base est fournie par  $(1, i, j, k)$ . On constate alors que la correspondance entre l'espace vectoriel réel de dimension 3 (repéré par le trièdre  $T$ ) et le sous-espace de quaternions purement imaginaires est une correspondance linéaire :

$$\text{si } \vec{V} = a\vec{V}_1 + b\vec{V}_2, \text{ on a } \underline{\vec{V}} = a\underline{\vec{V}}_1 + b\underline{\vec{V}}_2 \quad (5)$$

pour tous scalaires réels  $a$  et  $b$ .

En outre, on structure l'espace des quaternions en une **algèbre réelle** par l'intermédiaire du produit de deux quaternions. Les additions et les multiplications sur les quaternions se font de la même manière que sur les nombres complexes ( $a + ib$ ), avec introduction des grandeurs ( $j, k$ ) et respect des relations (2) et (3).

Il s'ensuit que :

- les additions et les multiplications sont associatives :

$$(q_1 + q_2) + q_3 = q_1 + (q_2 + q_3) \quad (6)$$

$$(q_1 q_2) q_3 = q_1 (q_2 q_3) \quad (7)$$

- la multiplication est distributive par rapport à l'addition :

$$q_1(q_2 + q_3) = q_1 q_2 + q_1 q_3 \quad (8)$$

- l'addition est commutative :

$$q_1 + q_2 = q_2 + q_1 \quad (9)$$

- la multiplication n'est pas toujours commutative.

Considérons par exemple les quaternions associés aux vecteurs  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  :

$$\left. \begin{array}{l} \underline{\vec{V}}_1 = x_1 i + y_1 j + z_1 k \\ \underline{\vec{V}}_2 = x_2 i + y_2 j + z_2 k \end{array} \right\} \quad (10)$$

Effectuons successivement les produits :

$$\underline{\vec{V}}_1 \underline{\vec{V}}_2 = -(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) + [i(y_1 z_2 - z_1 y_2) + j\dots]$$

$$\text{et } \underline{\vec{V}}_2 \underline{\vec{V}}_1 = -(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) - [i(y_1 z_2 - z_1 y_2) + j\dots]$$

$\underline{\vec{V}}_1 \underline{\vec{V}}_2$  et  $\underline{\vec{V}}_2 \underline{\vec{V}}_1$  admettent la même partie réelle, opposée au produit scalaire  $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$  ; par contre, leurs parties imaginaires, respectivement associées aux produits vectoriels  $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$  et  $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$ , sont opposées. Les relations précédentes sont équivalentes à :

$$\underline{\vec{V}}_1 \underline{\vec{V}}_2 = -\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 \quad (11)$$

Nous en déduisons que le produit de deux quaternions purement imaginaires associés à des vecteurs  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  est :

$$\text{— commutatif } (\underline{\vec{V}_1} \underline{\vec{V}_2} = \underline{\vec{V}_2} \underline{\vec{V}_1}) \quad (12)$$

quand  $\vec{V}_1$  est parallèle à  $\vec{V}_2$  ;

$$\text{— anticommutatif } (\underline{\vec{V}_1} \underline{\vec{V}_2} = -\underline{\vec{V}_2} \underline{\vec{V}_1}) \quad (13)$$

quand  $\vec{V}_1$  est orthogonal à  $\vec{V}_2$ .

De plus, l'application répétée de (11) nous conduit à :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = -\frac{1}{2} (\underline{\vec{V}_1} \underline{\vec{V}_2} + \underline{\vec{V}_2} \underline{\vec{V}_1}) \quad (14)$$

$$\text{et } \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \frac{1}{2} (\underline{\vec{V}_1} \underline{\vec{V}_2} - \underline{\vec{V}_2} \underline{\vec{V}_1}) \quad (15)$$

Étant donné un quaternion  $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ , nous appelons **conjugué** de  $q$  le quaternion  $\tilde{q}$  :

$$\tilde{q} = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k \quad (16)$$

Effectuons les produits suivants :

$$q\tilde{q} = \tilde{q}q = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \stackrel{\Delta}{=} p^2 \quad (17)$$

la grandeur  $p$  ainsi définie (le signe  $\stackrel{\Delta}{=}$  veut dire : égal à, par définition) est le **module** de  $q$  (on note  $p = |q|$ ).

Par ailleurs, il est aisément vérifiable les relations suivantes :

$$\widetilde{q+q'} = \tilde{q} + \tilde{q}' \text{ (ordre indifférent)} \quad (18)$$

$$\tilde{q}\tilde{q}' = \tilde{q}'\tilde{q} \text{ (ordre changé)} \quad (19)$$

$$\frac{\tilde{q}}{p} \frac{q}{p} = \frac{q}{p} \frac{\tilde{q}}{p} = 1 \quad (20)$$

ce qui signifie que  $\frac{q}{p}$  et  $\frac{\tilde{q}}{p}$  sont inverses l'un de l'autre, ou que

l'**inverse** du quaternion  $q$  est  $\frac{q}{p^2}$ .

**Remarques** : un quaternion de module unité est qualifié d'*unitaire*. La sous-algèbre des quaternions unitaires est isomorphe à l'algèbre des *matrices unitaires* ( $3 \times 3$ ), pour la définition desquelles le lecteur se reportera à l'article *Calcul matriciel* [AF 86] dans le présent traité.

Grâce au module  $p$ , l'algèbre des quaternions devient une *algèbre normée* avec, en particulier :

$$|q+q'| \leq |q| + |q'| \text{ et } |qq'| \leq |q||q'|$$

Avec cette norme, l'algèbre des quaternions est une *algèbre de Banach réelle* (cf article *Analyse fonctionnelle* [A 101] dans le présent traité). Comme l'inverse d'un quaternion non nul est bien défini, cette algèbre est un *corps de Banach réel*. Un théorème de structure établit d'ailleurs que les seuls corps de Banach réels sont le corps des réels et le corps des quaternions. On comprend maintenant la raison de l'échec d'obtention d'un corps avec trois composants seulement quant à la génération du corps des nombres complexes.

Un autre théorème de structure établit que les seules algèbres de division de dimension finie sont celles des réels, des complexes et des quaternions. On peut certes considérer le corps des quaternions comme un espace vectoriel de dimension 2 sur le corps des complexes.

## 2. Représentation d'une rotation par un quaternion

Dans l'espace à trois dimensions, une rotation autour d'un point  $O$  peut être définie par :

- un axe  $\Delta$ , passant par  $O$ , portant un vecteur unitaire  $\vec{u}$  ;
- un angle  $\theta$ , que l'on peut éventuellement limiter à  $(0, 180^\circ)$  sans perte de généralité : en effet, une rotation  $(-\theta, \vec{u})$  peut être remplacée par  $(\theta, -\vec{u})$ , le sens d'une rotation étant défini sur la figure 1.

Rapportons cet espace  $\mathbb{R}^3$  à un trièdre  $T$  orthonormé  $(x, y, z)$  et posons, en notation matricielle :

$$u_T = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (21)$$

avec  $\alpha, \beta, \gamma$  composantes du vecteur  $\vec{u}$  dans le trièdre  $T$ .

Étant donné un vecteur arbitraire  $\vec{V}$ , nous appelons  $(\theta, \vec{u}) \vec{V}$  le vecteur déduit de  $\vec{V}$  par la rotation  $(\theta, \vec{u})$ . La correspondance entre ces deux vecteurs est linéaire ; elle se représente donc par une matrice ( $3 \times 3$ ) dans le trièdre  $T$  choisi. Toutefois, il convient de minimiser les calculs algébriques et de disposer d'une bonne représentation pour la composition des rotations et de passage de la matrice colonne  $V_T$  à  $[(\theta, \vec{u}) \vec{V}]_T$ . Hamilton a résolu ce problème en introduisant le **quaternion unitaire**  $Q$  :

$$Q = \cos \frac{\theta}{2} + (\alpha i + \beta j + \gamma k) \sin \frac{\theta}{2} \quad (22)$$

$$\text{soit } Q = \cos \frac{\theta}{2} + \underline{\vec{u}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (23)$$

et en démontrant la **relation fondamentale** :

$$(\theta, \vec{u}) \vec{V} = Q \vec{V} \tilde{Q} \quad (24)$$

avec  $(\theta, \vec{u}) \vec{V}$  et  $\vec{V}$  quaternions associés respectivement aux vecteurs  $(\theta, \vec{u}) \vec{V}$  et  $\vec{V}$ , représentés dans  $T$ .

**Démonstration de la formule fondamentale (24).** Cette relation peut être mise sous la forme :

$$(\theta, \vec{u}) \vec{V} = \left( \cos \frac{\theta}{2} + \underline{\vec{u}} \sin \frac{\theta}{2} \right) \vec{V} \left( \cos \frac{\theta}{2} - \underline{\vec{u}} \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\text{soit } (\theta, \vec{u}) \vec{V} = \left( \vec{V} \cos^2 \frac{\theta}{2} - \underline{\vec{V}} \underline{\vec{u}} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} (\underline{\vec{u}} \vec{V} - \vec{V} \underline{\vec{u}}) \quad (25)$$

a ) Supposons  $\vec{V}$  parallèle à  $\vec{u}$ . Compte tenu de la relation (12) et du caractère unitaire de  $\vec{u}$ , nous avons :

$$\underline{\vec{u}} \vec{V} \underline{\vec{u}} = \underline{\vec{u}} \underline{\vec{u}} \vec{V} = -\vec{V} \text{ et } \underline{\vec{u}} \vec{V} = \vec{V} \underline{\vec{u}}$$

Ainsi, la relation (25) se réduit à :

$$(\theta, \vec{u}) \vec{V} = \vec{V}$$

L'opérateur  $Q \cdot \tilde{Q}$  laisse donc  $\vec{V}$  invariant ; cette propriété traduit l'invariance de  $\vec{V}$  dans la rotation  $(\theta, \vec{u})$ .

b) Supposons  $\vec{V}$  orthogonal à  $\vec{u}$ . Compte tenu de la relation (13) et du caractère unitaire de  $\vec{u}$ , nous avons :

$$\underline{\vec{u}} \vec{V} \vec{u} = -\underline{\vec{u}} \vec{u} \underline{\vec{V}} = \vec{V} \quad \text{et} \quad \underline{\vec{u}} \vec{V} = -\underline{\vec{V}} \vec{u}$$

Ainsi, la relation (25) prend la forme :

$$(\theta, \vec{u}) \vec{V} = \left( \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \vec{V} + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \underline{\vec{u}} \vec{V}$$

soit, compte tenu de la relation (15) :

$$(\theta, \vec{u}) \vec{V} = (\cos \theta) \vec{V} + (\sin \theta) \underline{\vec{u}} \wedge \vec{V}$$

Cette relation traduit la propriété géométrique représentée sur la figure 2.

c) Supposons  $\vec{V}$  quelconque. Le vecteur  $\vec{V}$  peut toujours être mis sous la forme :

$$\vec{V} = \vec{V}_a + \vec{V}_b$$

avec  $\vec{V}_a$  et  $\vec{V}_b$  composantes de  $\vec{V}$  respectivement parallèle et orthogonale à  $\vec{u}$ .

Compte tenu de la linéarité de l'opérateur  $Q \cdot \tilde{Q}$ , nous avons donc :

$$Q \underline{\vec{V}} \tilde{Q} = Q(\vec{V}_a + \vec{V}_b) \tilde{Q} = Q \underline{\vec{V}_a} \tilde{Q} + Q \underline{\vec{V}_b} \tilde{Q}$$

soit, d'après les propriétés a et b :

$$Q \underline{\vec{V}} \tilde{Q} = (\theta, \vec{u}) \vec{V}_a + (\theta, \vec{u}) \vec{V}_b$$

et, compte tenu de la linéarité de l'opérateur  $(\theta, \vec{u})$  :

$$Q \underline{\vec{V}} \tilde{Q} = (\theta, \vec{u}) (\vec{V}_a + \vec{V}_b) = (\theta, \vec{u}) \vec{V}$$

Les composantes intervenant dans la définition (1) s'écrivent :

$$\left. \begin{array}{l} q_1 = \alpha \sin \frac{\theta}{2} \\ q_2 = \beta \sin \frac{\theta}{2} \\ q_3 = \gamma \sin \frac{\theta}{2} \end{array} \right\} \quad (26)$$

L'identification terme à terme des deux membres de l'égalité (24) conduit à la relation suivante :

$$[(\theta, \vec{u}) \vec{V}]_T = BV_T \quad (27)$$

avec  $B$  matrice  $(3 \times 3)$  unitaire d'expression :

$$B = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_1^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & q_0^2 + q_3^2 - q_1^2 - q_2^2 \end{bmatrix}$$

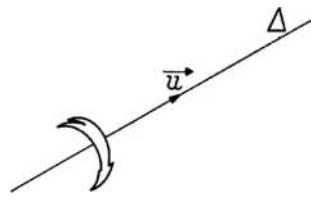


Figure 1 – Définition du sens d'une rotation  $\theta$  positive autour de  $\Delta$  (règle du tire-bouchon)

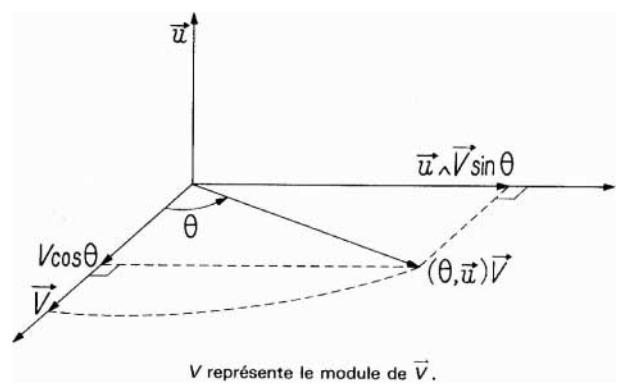


Figure 2 – Action de l'opérateur  $(\theta, \vec{u})$  sur le vecteur  $\vec{V}$ , supposé orthogonal à  $\vec{u}$

Notons que  $B$  est également la matrice traduisant le changement de coordonnées  $(T_2 \rightarrow T_1)$ , ou encore la matrice des cosinus directeurs des vecteurs unitaires de  $T_1$  dans  $T_2$ ,  $T_2$  étant déduit du trièdre orthonormé  $T_1$  par la rotation  $(\theta, \vec{u})$ . Il existe d'ailleurs une équivalence évidente entre les formules traduisant :

— l'influence de la rotation  $(\theta, \vec{u})$  sur les composantes d'un vecteur mobile  $\vec{V}$  dans un trièdre fixe  $T$ ;

— l'influence de la rotation  $(-\theta, \vec{u})$  sur les composantes d'un vecteur fixe  $\vec{V}$  dans un trièdre mobile  $T$ .

■ Conclusion : l'opérateur  $Q \cdot \tilde{Q}$  peut être considéré comme traduisant :

a) une rotation  $(\theta, \vec{u})$  appliquée à  $\vec{V}$ , avec projection dans le trièdre  $T$ ,

b) un changement de coordonnées  $(T_2 \rightarrow T_1)$ , avec  $T_2 = (\theta, \vec{u}) T_1$ .

En faisant intervenir explicitement les trièdres de projection  $T_1$  et  $T_2$  dans l'écriture des quaternions associés aux vecteurs, ces propriétés sont traduites par :

$$\begin{aligned} (\theta, \vec{u}) \vec{V}_{T_1} &= Q \underline{\vec{V}}_{T_1} \tilde{Q} \\ \vec{V}_{T_1} &= Q \underline{\vec{V}}_{T_2} \tilde{Q} \\ \text{et} \quad \underline{\vec{V}}_{T_1} &= Q \underline{\vec{V}}_{T_2} \tilde{Q} \\ \text{avec} \quad Q &= \cos \frac{\theta}{2} + \underline{\vec{u}}_{T_1} \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (28)$$

### 3. Application aux produits de rotations

#### 3.1 Première méthode

Considérons un vecteur  $\vec{V}$  auquel on fait subir successivement :

- une rotation  $(\theta_1, \vec{u}_1)$ , associée au quaternion  $Q_1$  ;
- une rotation  $(\theta_2, \vec{u}_2)$ , associée au quaternion  $Q'_2$  ;

$Q_1$  et  $Q'_2$  correspondant à la représentation de  $\vec{u}_1$  et de  $\vec{u}_2$  dans le trièdre  $T_1$ .

La relation fondamentale (24) permet d'écrire :

$$\begin{aligned} (\theta_1, \vec{u}_1) \vec{V} &= Q_1 \vec{V} \tilde{Q}_1 \\ (\theta_2, \vec{u}_2)[(\theta_1, \vec{u}_1) \vec{V}] &= Q'_2 Q_1 \vec{V} \tilde{Q}_1 \tilde{Q}'_2 \end{aligned}$$

soit, compte tenu de la relation (19) :

$$(\theta_2, \vec{u}_2)[(\theta_1, \vec{u}_1) \vec{V}] = Q'_2 Q_1 \vec{V} Q'_2 \tilde{Q}_1$$

Ainsi, au produit des rotations  $(\theta_1, \vec{u}_1)$  puis  $(\theta_2, \vec{u}_2)$  est associé le quaternion  $Q = Q'_2 Q_1$ , de la forme :

$$Q = \cos \frac{\theta}{2} + \underline{\vec{u}}_{T_1} \sin \frac{\theta}{2} = Q'_2 Q_1 \quad (29)$$

avec  $Q_1 = \cos \frac{\theta_1}{2} + \underline{\vec{u}_1}_{T_1} \sin \frac{\theta_1}{2} \quad (30)$

et  $Q'_2 = \cos \frac{\theta_2}{2} + \underline{\vec{u}_2}_{T_1} \sin \frac{\theta_2}{2} \quad (31)$

##### Exemple d'application :

— rotation 1 :  $\theta_1 = 90^\circ$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\beta_1 = 0$ ,  $\gamma_1 = 0$ , soit :

$$Q_1 = \cos 45^\circ + i \sin 45^\circ = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

— rotation 2 :  $\theta_2 = 90^\circ$ ,  $\alpha_2 = 0$ ,  $\beta_2 = 0$ ,  $\gamma_2 = 1$ , soit :

$$Q'_2 = \cos 45^\circ + k \sin 45^\circ = \frac{1+k}{\sqrt{2}}$$

Le quaternion associé au produit des rotations  $(\theta_1, \vec{u}_1)$  puis  $(\theta_2, \vec{u}_2)$  est donc égal à :

$$Q = Q'_2 Q_1 = \frac{(1+k)(1+i)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{i+j+k}{\sqrt{3}}$$

soit  $Q = (\cos 60^\circ) + (\sin 60^\circ) \frac{i+j+k}{\sqrt{3}}$

Il est associé à la rotation de  $120^\circ$  autour de la trisectrice  $\Delta$  du trièdre  $X, Y, Z$ , ce qui peut être vérifié directement sur la figure 3.

#### 3.2 Deuxième méthode

Dans les calculs précédents (§ 3.1), les composantes des vecteurs  $\vec{V}$ ,  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  sont toutes prises dans le même trièdre orthogonal  $T_1$ . Dans l'étude d'un produit de rotations  $(\theta_1, \vec{u}_1)$ , suivie de  $(\theta_2, \vec{u}_2)$ , suivie de etc., il est souvent commode de faire intervenir :

- les composantes de  $\vec{u}_1$  dans un trièdre  $T_1$  ;
- les composantes de  $\vec{u}_2$  dans le trièdre  $T_2 = (\theta_1, \vec{u}_1) T_1$ , etc.

Faisons intervenir explicitement les trièdres de projection  $T_1$  et  $T_2$  et posons, en plus des expressions (30) et (31) de  $Q_1$  et  $Q'_2$  :

$$Q_2 = \cos \frac{\theta_2}{2} + \underline{\vec{u}_2}_{T_2} \sin \frac{\theta_2}{2} \quad (32)$$

Compte tenu de la propriété traduite par (28), nous avons :

$$Q'_2 = \cos \frac{\theta_2}{2} + Q_1 \underline{\vec{u}_2}_{T_2} \tilde{Q}_1 \sin \frac{\theta_2}{2}$$

soit  $Q'_2 = Q_1 \left( \cos \frac{\theta_2}{2} + \underline{\vec{u}_2}_{T_2} \sin \frac{\theta_2}{2} \right) \tilde{Q}_1 = Q_1 Q_2 \tilde{Q}_1$

d'où, après multiplication à droite par  $Q_1$  :

$$Q'_2 Q_1 = Q_1 Q_2 \quad (33)$$

— L'opérateur du produit des rotations  $(\theta_1, \vec{u}_1)$  suivie de  $(\theta_2, \vec{u}_2)$  peut donc indifféremment être représenté par  $Q'_2 Q_1$  ou  $Q_1 Q_2$  (figure 4).

Reprenons l'**exemple** traité au paragraphe 3.1 (figure 3) :

$$Q_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} ; \quad Q_2 = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$$

Nous vérifions que :

$$Q_1 Q_2 = \frac{1}{2}(1+i)(1+j) = \frac{1}{2}(1+i+j+k) = Q'_2 Q_1$$

#### 3.3 Représentation de l'attitude d'un véhicule

##### 3.3.1 Notation engin

Les attitudes de la structure d'une fusée-sonde, d'un lanceur de satellite ou d'un missile balistique sont souvent représentées par un produit de rotations ainsi définies :

$T_f \equiv (X_f, Y_f, Z_f)$  trièdre de référence, orthonormé ;  
 $T_m \equiv (X_m, Y_m, Z_m)$  trièdre lié à la structure en question, déduit de  $T_f$  par :

- une rotation  $\theta$  (*tangage*) autour de  $Y_f$ ,
- une rotation  $\psi$  (*iacet*), autour de l'axe déduit de  $X_f$  par la rotation précédente,
- une rotation  $\varphi$  (*roulis*), autour de l'axe déduit de  $Z_f$  par le produit des deux rotations précédentes.

L'application de la *deuxième méthode* (§ 3.2) permet de calculer le quaternion  $Q$  associé à la rotation faisant passer de  $T_f$  à  $T_m$  :

$$Q = \left( \cos \frac{\theta}{2} + j \sin \frac{\theta}{2} \right) \left( \cos \frac{\psi}{2} + i \sin \frac{\psi}{2} \right) \left( \cos \frac{\varphi}{2} + k \sin \frac{\varphi}{2} \right)$$

d'où, par identification :

$$q_0 = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$q_1 = \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$q_2 = \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} - \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$q_3 = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}$$

Le produit des rotations  $(\theta_1, \vec{u}_1) = (90^\circ, X)$  suivie de  $(\theta_2, \vec{u}_2) = (90^\circ, Z)$  est équivalent à la permutation d'axes  $(X, Y, Z \rightarrow Z, X, Y)$ , elle-même équivalente à une rotation de  $360^\circ/3 = 120^\circ$  autour de la trisectrice  $\Delta$  de  $(X, Y, Z)$ .

Les cosinus directeurs de  $\Delta$  dans  $(X, Y, Z)$  sont tous égaux à  $1/\sqrt{3}$ .

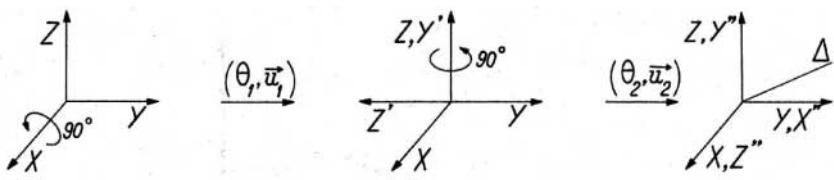


Figure 3 – Exemple de produit de rotations

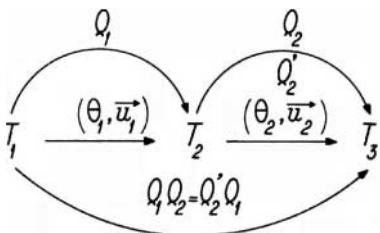


Figure 4 – Traitement des produits de rotations

### 3.3.2 Notations avion-bateau

Les attitudes d'un avion, d'un bateau, d'un sous-marin, sont souvent représentées par un produit de rotations ainsi définies ( $T_f$  et  $T_m$  jouant les mêmes rôles qu'au § 3.3.1) :

- une rotation  $\psi$  (*lacet*) autour de  $Z_f$ ;
- une rotation  $\theta$  (*tangage*) autour de l'axe déduit de  $Y_f$  par la rotation précédente ;
- une rotation  $\varphi$  (*roulis*) autour de l'axe déduit de  $X_f$  par le produit des rotations précédentes.

L'application de la *deuxième méthode* (§ 3.2) permet de calculer le quaternion  $Q$  associé à la rotation faisant passer de  $T_f$  à  $T_m$  :

$$Q = \left( \cos \frac{\Psi}{2} + k \sin \frac{\Psi}{2} \right) \left( \cos \frac{\theta}{2} + j \sin \frac{\theta}{2} \right) \left( \cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)$$

d'où, par identification :

$$q_0 = \cos \frac{\Psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\Psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$q_1 = \cos \frac{\Psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\Psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\varphi}{2}$$

$$q_2 = \cos \frac{\Psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\Psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$q_3 = -\cos \frac{\Psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\Psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\varphi}{2}$$

## Références bibliographiques

### Théorie des quaternions

- [1] HAMILTON (W.B.). – *Lectures on quaternions*. Dublin (ouvrage original du fondateur de la théorie des quaternions) (1853). Chelsea (rédition). *Mathematical papers*. Vol. 3 Cambridge University Press (1969) (1967).
- [2] BOURBAKI (N.). – *Éléments de mathématiques. Algèbre*. Hermann (un exposé succinct et moderne sur les quaternions se trouve au chapitre 3 ; on y trouve aussi un exposé rapide sur les octonions) (1970).

- [3] PORTEOUS (I.R.). – *Topological geometry*. Van Nostrand (1969).

### Applications

- [4] SAMUEL (P.). – *Théorie algébrique des nombres*. Hermann Coll. Méthodes (on y trouvera une démonstration, par utilisation de quaternions, du théorème de Lagrange selon lequel tout entier naturel est la somme de quatre carrés) (1967).

- [5] VAL (P. du). – *Homographies, quaternions and rotations*. Oxford University Press.

- [6] BERGER (M.). – *Géométrie*. Tome 2 Nathan Coll. Cédic (1977).

- [7] RADIX (J.C.). – *Systèmes inertIELS à composants liés*. Cépadues Coll. ENSAE (1980).